Ueber gemeinschaftliche Systeme conjugirter Durchmesser von concentrischen Kurven und Flächen zweiten Grades.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Osw. Carl Heinr. Dittmann

Dr. phil. Mag. art.

Rostock.

Carl Boldt's Buchdruckerei.

1869.

Wenn zwei concentrische Kurven oder Flächen zweiten Grades in ihren Hauptachsen zusammenfallen, so bilden letztere ein beiden Kurven, resp. Flächen gemeinschaftliches System conjugirter Durchmesser. Denkt man sich nun die eine Kurve oder Fläche fest, die andre unter Beibehaltung des gemeinschaftlichen Mittelpunkt's beliebig gedreht*), so entsteht die Frage, ob die beiden Kurven oder Flächen auch dann noch gemeinschaftliche Systeme conjugirter Durchmesser, eventuell wie viele besitzen. Die Beantwortung dieser Frage ist der Zweck nachstehender Untersuchung.

I. Kurven.

Die Gleichungen der beiden centrischen Linien zweiten Grades, der Ellipse und Hyperbel (der Kreis bleibt selbstredend hier ausgeschlossen), können unter der gemeinschaftlichen Form:

1) $$Ax^2 + By^2 = K$$

zusammengefaßt werden, sobald nur unter B der absolute Werth dieser Größe verstanden wird. Das Hauptachsensystem der durch die Gleichung (1) repräsentirten Kurve soll als Coordinatensystem zu Grunde gelegt werden.

---

*) Bei Kurven in der Ebene der ersten.

Die zweite concentrische Kurve habe, auf ihre Hauptachsen bezogen, die Gleichung:

$$A^1x'^2 + B^1y'^2 = K^1$$

Bezieht man sie aber auf das zu Grunde gelegte Coordinatensystem, so geht in Folge der bekannten Formeln für die Transformation rechtwinkliger Systeme mit demselben Anfangspunkte ihre Gleichung über in:

2) $$Lx^2 + My^2 + 2Nxy = K^1$$

wo, wenn α den Drehungswinkel bezeichnet, die Coeffizienten folgende Werthe haben:

$$L = A^1 \cos.^2 \alpha + B^1 \sin.^2 \alpha.$$
$$M = A^1 \sin.^2 \alpha + B^1 \cos.^2 \alpha.$$
$$N = (A^1 - B^1) \sin. \alpha \cos. \alpha.$$

Es seien nun

3) $$x = m_1 y \text{ und } x = m_2 y$$

die Gleichungen irgend zweier Durchmesser beider Kurven. Diese beiden Durchmesser sind bekanntlich einander conjugirt, wenn die Tangenten in den Endpunkten des einen dem andern parallel sind.

Die Coordinaten der Endpunkte eines Durchmessers ergeben sich durch Entwickelung von x und y aus der Kurvengleichung und der des betreffenden Durchmessers, und zwar findet man für die beiden Durchschnittspunkte des ersten Durchmessers mit der Kurve (1) nachstehende Werthe:

$$x = \pm \frac{m_1 \sqrt{K}}{\sqrt{Am_1^2 + B}}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{Am_1^2 + B}}$$

Mit Hülfe der bekannten Formel

$$\frac{dF}{dx}(\xi - x) + \frac{dF}{dy}(\eta - y) = 0$$

erhält man für die in den Endpunkten dieses Durchmessers an die Kurve (1) gelegten Tangenten folgende zwei Gleichungen:

$$Am_1x + By = + \sqrt{K}\sqrt{Am_1^2 + B}$$

und

$$Am_1x + By = - \sqrt{K}\sqrt{Am_1^2 + B}.$$

Die Bedingung, daß diese beiden Tangenten dem zweiten Durchmesser parallel sind, ist für beide dieselbe, nämlich:

4) $$Am_1m_2 + B = 0.$$

Es ist klar, daß man dieselbe Gleichung (4) erhalten hätte, wenn man in den Endpunkten des zweiten Durchmessers an die Kurve (1) Tangenten gelegt uud die Bedinguug aufgestellt hätte, unter welcher letztere dem ersten Durchmesser parallel sind; man braucht, um sich hiervon zu überzeugen, in der vorigen Rechnung nur den Index 1. mit 2. zu vertauschen. Die mit (4) bezeichnete Gleichung ist somit die einzige Bedingung, welche statthaben muß, wenn die beiden Durchmesser (3) in Beziehung auf die Kurve (1) einander conjugirt sein sollen.

Ganz in derselben Weise erhält man eine Gleichung, welche diese Bedingung in Beziehung auf die Kurve (2) enthält. (Die zweite Gleichung wird, wie oben, mit der ersten identisch.)

Die Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte des ersten Durchmessers mit der Kurve (2) sind:

$$x = \pm \frac{m_1\sqrt{K^1}}{\sqrt{Lm_1^2 + M + 2Nm_1}}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{K^1}}{\sqrt{Lm_1^2 + M + 2Nm_1}}$$

Die an die Kurve (2) in diesen Punkten gelegten Tangenten haben die Gleichungen (beide zusammengefaßt):

$$(Lm_1 + N)x + (Nm_1 + M)y = \pm \sqrt{K^1} \sqrt{Lm_1^2 + M + 2Nm_1}$$

und sie sind dem zweiten Durchmesser parallel, wenn

5) $$Lm_1m_2 + M + N(m_1 + m_2) = 0.$$

Sollen nun die beiden Durchmesser (3) ein den beiden Kurven (1) und (2) gemeinschaftliches System conjugirter Durchmesser bilden, so müssen die Gleichungen (4) und (5) zugleich stattfinden, und somit sind die zur Bestimmung der beiden Richtungscoeffizienten m_1 und m_2 erforderlichen zwei Gleichungen gefunden. Da nun letztere in Beziehung auf die resp. unbekannten Größen vom ersten Grade sind, so ergiebt sich aus ihnen für jeden der beiden Richtungscoeffizienten immer je ein reeller Werth. Es folgt hieraus, daß zwei concentrische Kurven zweiten Grades in jeder beliebigen Lage ein gemeinschaftliches System conjugirter Durchmesser und nur dieses eine besitzen.

Vielleicht möchte es von Interesse sein, zu untersuchen, ob diese, beiden Kurven gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser unter Umständen zusammen fallen, mit andern Worten, ob die beiden Richtungscoeffizienten m_1 und m_2 gleiche Werthe erhalten können. Bei zwei Ellipsen (wo B einen positiven Werth hat) ist dieser Fall nicht möglich. Denn gesetzt, m_2 wäre gleich m_1, so ginge die Gleichung (4) über in:

$$Am_1^2 + B = 0$$

und m_1 erhielte im Widerspruch zu dem Obigen den imaginären Werth

$$m_1 = \pm \sqrt{-\frac{B}{A}}$$

Dieser Widerspruch fällt hingegen fort, wenn eine oder beide Kurven Hyperbeln sind, da B hier einen negativen Werth hat, und in der That ist aus der analytischen Geometrie ein Beispiel für das Zusammenfallen zweier conjugirten Durchmesser in den Asymptoten der Hyperbel genugsam bekannt.

II. Flächen.

Schließt man die speziellen Fälle aus, wo eine Fläche zweiten Grades zu einem Kegel, Cylinder oder zu einem ebenen Gebilde wird, so haben die drei Mittelpunktsflächen zweiten Grades, das Ellipsoid, das einfache und das getheilte Hyperboloid die gemeinsame Gleichung:

1) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K.$$

Das Hauptachsensystem der durch diese Gleichung repräsentirten Kurve möge auch hier als Coordinatensystem zu Grunde gelegt werden.

Die zweite concentrische Fläche sei, auf ihre Hauptachsen bezogen:

$$A^1x'^2 + B^1y'^2 + C^1z'^2 = K^1$$

Ihre Gleichung nimmt in Folge der hier zur Anwendung kommenden Transformationsformeln die Form an:

2) $$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Pxy + 2Qxz + 2Ryz = K^1$$

wo, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\cos.\ (x'x) = \alpha,\ \cos.\ (x'y) = \alpha',\ \cos.\ (x'z) = \alpha''$$
$$\cos.\ (y'x) = \beta,\ \cos.\ (y'y) = \beta',\ \cos.\ (y'z) = \beta''$$
$$\cos.\ (z'x) = \gamma,\ \cos.\ (z'y) = \gamma',\ \cos.\ (z'z) = \gamma''$$

den Coeffizienten folgende Werthe zukommen:

$$\begin{aligned}
L &= \alpha^2 A^1 + \beta^2 B^1 + \gamma^2 C^1 \\
M &= \alpha'^2 A^1 + \beta'^2 B^1 + \gamma'^2 C^1 \\
N &= \alpha''^2 A^1 + \beta''^2 B^1 + \gamma''^2 C^1 \\
P &= \alpha\alpha' A^1 + \beta\beta' B^1 + \gamma\gamma' C^1 \\
Q &= \alpha\alpha'' A^1 + \beta\beta'' B^1 + \gamma\gamma'' C^1 \\
R &= \alpha'\alpha'' A^1 + \beta'\beta'' B^1 + \gamma'\gamma'' C^1.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen irgend dreier Durchmesser beider Flächen seien:

3) $$\begin{cases} x = m_1 z \\ y = n_1 z \end{cases} \quad \begin{cases} x = m_2 z \\ y = n_2 z \end{cases} \quad \begin{cases} x = m_3 z \\ y = n_3 z \end{cases}$$

Conjugirt sind diese drei Durchmesser, wenn die Ebene je zweier den Tangentialebenen in den Endpunkten des dritten parallel ist. Nun ist nach bekannten Regeln der analytischen Geometrie die Ebene des zweiten und dritten Durchmessers:

$$(n_3 - n_2)x + m_2 - m_3)y + (m_3 n_2 - m_2 n_3)z = 0$$

die des ersten und dritten:

$$(n_3 - n_1)x + (m_1 - m_3)y + (m_3 n_1 - m_1 n_3)z = 0$$

endlich die des ersten und zweiten:

$$(n_2 - n_1)x + (m_1 - m_2)y + (m_2 n_1 - m_1 n_2)z = 0$$

Die Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte des ersten Durchmessers mit der Fläche (1) sind:

$$x = \pm \frac{m_1 \sqrt{K}}{\sqrt{Am_1^2 + Bn_1^2 + C}}$$

$$y = \pm \frac{n_1 \sqrt{K}}{\sqrt{Am_1^2 + Bn_1^2 + C}}$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{Am_1^2 + Bn_1^2 + C}}$$

Die Endpunkte des zweiten und dritten Durchmessers in Beziehung auf dieselbe Fläche (1) gehen hieraus hervor, wenn man den Index 1 mit 2, resp. 3 vertauscht.

Die Anwendung der bekannten Formel

$$\frac{dF}{dx}(\xi - x) + \frac{dF}{dy}(\eta - y) + \frac{dF}{dz}(\zeta - z) = 0$$

liefert als Gleichungen der in den Endpunkten des ersten Durchmessers an die Fläche (1) gelegten Tangentialebenen (beide zusammengefaßt):

$$Am_1x + Bn_1y + Cz = \pm\sqrt{K}\sqrt{Am_1{}^2 + Bn_1{}^2 + C}.$$

Beide Tangentialebenen sind der Ebene des zweiten und dritten Durchmessers parallel, wenn:

$$\begin{cases} Am_1(m_2 - m_3) = Bn_1(n_3 - n_2) \text{ und gleichzeitig} \\ Am_1(m_3n_2 - m_2n_3) = C(n_3 - n_2). \end{cases}$$

Man kann diesen beiden Gleichungen eine bessere Form geben, wenn man aus ihnen zuerst m_3 und dann m_2 eliminirt; man erhält alsdann:

$$\begin{cases} Am_1m_2 + Bn_1n_2 + C = 0 \\ Am_1m_3 + Bn_1n_3 + C = 0 \end{cases}$$

Ferner findet man als Bedingungen dafür, daß die in den Endpunkten des zweiten, resp. dritten Durchmessers an die Fläche (1) gelegten Tangentialebenen (deren Gleichungen aus den für den ersten Durchmesser geltenden durch Vertauschung des Index 1 mit 2, bezügl. 3 hervorgehen) den Ebenen des ersten und dritten, resp. des ersten und zweiten Durchmessers parallel sind, die beiden Gleichungspaare:

$$\begin{cases} Am_2(m_1 - m_3) = Bn_2(n_3 - n_1) \\ Am_2(m_3 n_1 - m_1 n_3) = C(n_3 - n_1) \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} Am_3(m_1 - m_2) = Bn_3(n_2 - n_1) \\ Am_3(m_2 n_1 - m_1 n_2) = C(n_2 - n_1) \end{cases}$$

welche durch Elimination von m_3 und m_1 resp. von m_2 und m_1 in folgende übergehen:

$$\begin{cases} Am_1 m_2 + Bn_1 n_2 + C = 0 \\ Am_2 m_3 + Bn_2 n_3 + C = 0 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} Am_1 m_3 + Bn_1 n_3 + C = 0 \\ Am_2 m_3 + Bn_2 n_3 + C = 0 \end{cases}$$

Wie man sieht, ist aber von den so erhaltenen Bedingungsgleichungen die erste mit der dritten, die zweite mit der fünften die vierte mit der sechsten identisch; daher reduziren sich dieselben auf folgende drei:

4) $$\begin{cases} Am_1 m_2 + Bn_1 n_2 + C = 0 \\ Am_1 m_3 + Bn_1 n_3 + C = 0 \\ Am_2 m_3 + Bn_2 n_3 + C = 0 \end{cases}$$

Der Definition zufolge drückt also das System der Gleichungen (4) die Bedingungen aus, welche stattfinden müssen, wenn die drei Durchmesser (3) conjugirte Durchmesser der Fläche (1) sein sollen.

Um diese Bedingungen in Beziehung auf die Fläche (2) zu ermitteln, verfahren wir durchaus analog.

Die Coordinaten der beiden Durchschnittspunkte des ersten Durchmessers mit der Fläche (2) sind:

$$x = \pm \frac{m_1 \sqrt{K^1}}{\sqrt{Lm_1^2 + Mn_1^2 + N + 2Pm_1n_1 + 2Qm_1 + 2Rn_1}}$$

$$y = \pm \frac{n_1 \sqrt{K^1}}{\sqrt{Lm_1^2 + Mn_1^2 + N + 2Pm_1n_1 + 2Qm_1 + 2Rn_1}}$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{K^1}}{\sqrt{Lm_1^2 + Mn_1^2 + N + 2Pm_1n_1 + 2Qm_1 + 2Rn_1}}$$

Hieraus ergeben sich wie oben durch Vertauschung der Indices die Endpunkte des zweiten und dritten Durchmessers. Die Tangentialebenen in den Endpunkten des ersten Durchmessers sind:

$$(Lm_1 + Pn_1 + Q)x + (Pm_1 + Mn_1 + R)y + (Qm_1 + Rn_1 + N)z = \pm \sqrt{K^1}$$
$$\sqrt{Lm_1^2 + Mn_1^2 + N + 2Pm_1n_1 + 2Qm_1 + 2Rn_1}$$

und sie sind der Ebene des zweiten und dritten Durchmessers parallel, wenn:

$$\begin{cases} (Lm_1 + Pn_1 + Q)(m_2 - m_3) = (Pm_1 + Mn_1 + R)(n_3 - n_2) \text{ u.} \\ (Lm_1 + Pn_1 + Q)(m_3n_2 - m_2n_3) = (Qm_1 + Rn_1 + N)(n_3 - n_2) \end{cases}$$

oder nach Elimination von m_3, resp. m_2, wenn:

$$\begin{cases} Lm_1m_2 + Mn_1n_2 + N + P(m_1n_2 + m_2n_1) \\ + Q(m_1 + m_2) + R(n_1 + n_2) = 0 \text{ und} \\ Lm_1m_3 + Mn_1n_3 + N + P(m_1n_3 + m_3n_1) \\ + Q(m_1 + m_3) + R(n_1 + n_3) = 0 \end{cases}$$

In ähnlicher Weise (am einfachsten durch Vertauschung der Indices) findet man zwei Gleichungspaare, welche die Bedingung dafür enthalten, daß die Tangentialebenen in den Endpunkten des zweiten und dritten Durchmessers den Ebenen des ersten und dritten, resp. des ersten und zweiten Diameters

parallel sind. Es ist aber klar, daß, wie oben, je zwei dieser sechs Bedingungsgleichungen identisch sein werden, und daß sich dieselben auf folgende drei reduziren:

$$5)\quad \begin{cases} Lm_1m_2 + Mn_1n_2 + N + P(m_1n_2 + m_2n_1) \\ + Q(m_1 + m_2) + R(n_1 + n_2) = 0 \\ Lm_1m_3 + Mn_1n_3 + N + P(m_1n_3 + m_3n_1) \\ + Q(m_1 + m_3) + R(n_1 + n_3) = 0 \\ Lm_2m_3 + Mn_2n_3 + N + P(m_2n_3 + m_3n_2) \\ + Q(m_2 + m_3) + R(n_2 + n_3) = 0 \end{cases}$$

Die drei Durchmesser (3) bilden nun ein den beiden Flächen (1) und (2) gemeinschaftliches System conjugirter Durchmesser, wenn die sechs Gleichungen (4) und (5) zugleich stattfinden.

Um zu untersuchen, ob auch hier die sechs Richtungscoeffizienten stets reelle Werthe erhalten, wollen wir einen derselben, etwa m_1, bestimmen.

Multiplicirt man die ersten beiden Gleichungen des Systems (4) resp. mit m_3 und m_2 und subtrahirt dann die zweite von der ersten, so kommt:

$$Bn_1(m_3n_2 - m_2n_3) + C(m_3 - m_2) = 0$$

Dieselben Gleichungen multiplicire man resp. mit n_3 und n_2, so erhält man durch Subtraction der ersten von der zweiten:

$$Am_1(m_3n_2 - m_2n_3) + C(n_2 - n_3) = 0$$

Durch dieselben Operationen ergeben sich aus den ersten beiden Gleichungen des Systems (5) folgende zwei Gleichungen:

$$(Pm_1 + Mn_1 + R)(m_3n_2 - m_2n_3) + (Qm_1 + Rn_1 + N)(m_3 - m_2) = 0 \quad \text{und}$$

$$(Lm_1 + Pn_1 + Q)(m_3n_2 - m_2n_3) + (Qm_1 + Rn_1 + N)(n_2 - n_3) = 0$$

Dividirt man jetzt die erste und dritte, sowie die zweite und vierte der zuletzt entstandenen vier Gleichungen durch einander, so erhält man:

$$Bn_1(Qm_1 + Rn_1 + N) = C(Pm_1 + Mn_1 + R$$

und

$$Am_1(Qm_1 + Rn_1 + N) = C(Lm_1 + Pn_1 + Q)$$

welche zwei Gleichungen nur noch die Unbekannten m_1 und n_1 enthalten. Aus der letzten ist:

6) $$n_1 = \frac{C(Lm_1 + Q) - A(Qm_1{}^2 + Nm_1)}{ARm_1 - CP}$$

Durch Substitution dieses Werthes in die vorhergehende Gleichung ergiebt sich zur Bestimmung von m_1 eine kubische Gleichung von der Form:

7) $$\mathfrak{A}m_1{}^3 + \mathfrak{B}m_1{}^2 + \mathfrak{C}m_1 + \mathfrak{D} = 0$$

Es ist klar, daß man durch analoge Behandlung von je zwei andern Gleichungen der Systeme (4) und (5), da ja die unbekannten Größen in jenen sechs Gleichungen symmetrisch vorkommen, die nämliche kubische Gleichung (mit denselben Coeffizienten) für m_2 und für m_3 erhalten würde. Hieraus folgt, daß, wenn man eine Wurzel der qu. kubischen Gleichung für den Werth von m_1 nimmt, die beiden andern Wurzeln die Werthe von m_2 und m_3 sein werden.

Durch Auflösung jener kubischen Gleichung findet man also die Werthe der drei Größen m_1, m_2, m_3, und indem man diese nach einander in die Gleichung (6) einträgt, erhält man

die Werthe von n_1, n_2, n_3. Es bleibt jetzt noch übrig, zu beweisen, daß diesen sechs Richtungscoeffizienten immer reelle Werthe zukommen. Dies ist der Fall, wenn die kubische Gleichung (7) drei reelle Wurzeln hat; denn aus der Gleichung (6) folgt alsdann unmittelbar, daß auch die Größen n_1, n_2 und n_3 reelle Werthe besitzen. Nun hat die Gleichung (7) als kubische mindestens eine reelle Wurzel; durch Substitution derselben in die Gleichung (6) erhält auch n_1 einen reellen Werth, weil [wie eben die Gleichung (6) zeigt] n_1 eine rationale Funktion von m_1 ist. Setzt man diese reellen Werthe von m_1 und n_1 in die ersten und auch in die zweiten Gleichungen der Systeme (4) und (5) ein, so erhält man vier Gleichungen, von denen die beiden ersten nur noch die Unbekannten m_2 und n_2, die beiden letzten nur noch die Unbekannten m_3 und n_3 enthalten; da diese vier Gleichungen in Beziehung auf die resp. unbekannten Größen vom ersten Grade sind, so ergeben sich aus ihnen reelle Werthe von m_2 und n_2 und von m_3 und n_3. Nun sind aber dem Obigen zufolge m_2 und m_3 nichts Andres als die zweite und dritte Wurzel der kubischen Gleichung (7), welche hiernach immer drei reelle Wurzeln hat.

Wir erhalten somit den Satz:

Zwei concentrische Flächen zweiten Grades haben in jeder beliebigen Lage ein gemeinschaftliches System conjugirter Durchmesser und zwar nur dieses eine.

Schließlich möge auch hier noch die Frage erörtert werden, ob von den drei gemeinschaftlichen conjugirten Durchmessern zwei oder alle drei zusammenfallen können. Sind die beiden Flächen Ellipsoide, so kann keiner dieser beiden Fälle eintreten. Nimmt man nämlich an, daß $m_2 = m_1$ wäre, so müßte

nothwendigerweise auch $n_2 = n_1$ werden; die erste Gleichung des Systems (4) ginge alsdann über in:

$$Am_1^2 + Bn_1^2 + C = 0$$

und sowohl m_1 wie n_1 erhielten gegen das oben Bewiesene imaginäre Werthe. In derselben Weise läßt sich zeigen, daß m_1 auch nicht gleich m_3, und m_2 nicht gleich m_3 sein kann.

Der hier auftretende Widerspruch erstreckt sich aber nicht auf die beiden andern centrischen Flächen zweiten Grades.